C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série II, p. 815-820, 1989

Méthodes numériques appliquées à la mécanique/*Computational Mechanics*

Correction d'entropie pour des schémas numériques approchant un système hyperbolique

Kamel KHALFALLAH et Alain LERAT

Résumé — Pour une forme très générale de schémas aux différences conservatifs, explicites ou implicites, centrés ou décentrés, on construit une correction rendant le schéma entropique à l'état stationnaire. Cette correction préserve la précision du second ordre, ne modifie pas le domaine de stabilité linéaire et, pour un schéma à trois points, est la moins dissipative possible.

Entropy correction for numerical schemes approximating a hyperbolic system

Abstract — *For a very general form of conservative difference schemes which are explicit or implicit, centred or noncentred, we construct a correction making the scheme entropic at steady state. This correction preserves second-order accuracy, does not not modify the linear stability domain and, for a three points scheme, it is as little dissipative as possible.*

Abridged English Version — We consider weak solutions of the hyperbolic system of conservation laws (2.1) which satisfy an entropy inequality (2.3). For computing these solutions, we introduce two-level conservative schemes (2.4)-(2.5) which are explicit or linearly implicit, the explicit part of the numerical flux $h^{\text{expl}}_{j+(1/2)}$ being of the form (2.6) and thus characterized by some matrix $Q_{j+(1/2)}$.

Having in mind aerodynamic applications, we restrict our attention to the case where the schemes are used only to reach a steady-state.

DEFINITION. — *The scheme* (2.4)-(2.5) *is said to be "entropic at steady-state" if the solutions* w_j *of* (4.1) *satisfy the discrete entropy inequality* (4.2) *where* $\Phi_{j+(1/2)}$ *is a numerical entropy flux.*

By using the work of Tadmor [6] on semi-discrete schemes, we have:

THEOREM 1. — *The scheme* (2.4)-(2.6) *is entropic at steady-state if (and only if for a 3-point scheme) the criterion* (3.5) *holds, where the components of* v *are the entropy variables and* $Q^*_{j+(1/2)}$ *is a matrix defined by* (3.6)-(3.8).

Then for a scheme which does not satisfy (3.5), we construct an entropy correction such that the corrected scheme is associated with a matrix $Q'_{j+(1/2)}$ defined by (4.3), (4.6) and (4.7) and we prove:

THEOREM 2. — *The correction* (*a*) *Satisfies* (4.4) *and* (4.5), i.e. *it does not operate where not necessary and the corrected scheme satisfies* (3.5).

(*b*) *Does not increase the number of points involved in the scheme.*

(*c*) *Is dissipative* ($\alpha_{j+(1/2)} \geqq 0$).

(*d*) *Is the least dissipative correction of the form* (4.3), (4.6) *satisfying* (3.5).

For a 3-point scheme, it follows that the proposed correction is the least dissipative one for which the corrected scheme is entropic at steady-state. Furthermore, we prove that the correction preserves the second-order accuracy and also the stability domain of the original scheme.

Note présentée par Paul GERMAIN.

0249-6305/89/03080815 $ 2.00

The correction has been successfully applied to fluid dynamic problems. After generalizing the correction to the case of several space-dimensions, we have used it for computing hypersonic flows with a centred implicit method.

---

1. Introduction. — La caractérisation et la recherche de schémas numériques entropiques pour l'approximation d'un système hyperbolique de lois de conservation a fait l'objet de divers travaux ([1]-[6] par exemple). Dans ces travaux, la difficulté est de concilier la satisfaction d'une forme discrète d'inégalité d'entropie et une précision d'ordre supérieur à un. A cet égard, l'étude récente de Tadmor [6], pour des schémas semi-discrets, ouvre des perspectives intéressantes. Cette étude conduit en effet à un critère d'entropie qui, en théorie, n'exclut pas une précision d'ordre deux et qui est lié assez directement à la viscosité interne du schéma. Partant d'une forme très générale de schémas complètement discrets, on se propose ici de construire et d'analyser une correction d'entropie inspirée du critère de Tadmor et destinée à l'approximation des problèmes stationnaires par une méthode instationnaire.

2. Présentation du problème exact et des schémas numériques. — Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^m$ et f une fonction très régulière de Ω dans $\mathbb{R}^m$. On considère le système de m lois de conservation :

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f(w)}{\partial x}=0, \qquad x\in\mathbb{R}, t>0. \tag{2.1}$$

où $w(x, t)\in\Omega$. Ce système est de type hyperbolique, c'est-à-dire que la matrice jacobienne $A(w)=df(w)/dw$ a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable. On suppose l'existence d'un couple d'entropie (E, F) constitué de deux fonctions régulières de Ω dans $\mathbb{R}$, l'entropie E étant strictement convexe et le flux d'entropie F vérifiant la condition de comptabilité :

$$\left(\frac{dF}{dw}\right)^{T}=\left(\frac{dE}{dw}\right)^{T}A \tag{2.2}$$

où les gradients de E et F par rapport à w sont représentés par des matrices-colonne et T désigne un symbole de transposition.

Afin d'éliminer les solutions non physiques, on recherche les solutions faibles du système (2.1) satisfaisant, au sens des distributions, l'inégalité d'entropie :

$$\frac{\partial E(w)}{\partial t}+\frac{\partial F(w)}{\partial x}\leqq 0. \tag{2.3}$$

On approche le système (2.1) par des schémas aux différences conservatifs, explicites ou linéairement implicites, à deux niveaux de temps :

$$\Delta w_j+\sigma(h_{j+(1/2)}-h_{j+(1/2)})=0 \tag{2.4}$$

avec un flux numérique :

$$h_{j+(1/2)}=h^{\mathrm{expl}}_{j+(1/2)}+\sum_{p=-J_1+1}^{J_1}(H_p)_{j+(1/2)}\Delta w_{j+p} \tag{2.5}$$

dont la partie explicite $h^{\mathrm{expl}}_{j+(1/2)}$ et les coefficients matriciels $(H_p)_{j+(1/2)}$ ne dépendent que des w_{j+l}, $l=-J+1, \ldots, J$ et de σ, où

$$w_j=w_j^n, \qquad \Delta w_j=w_j^{n+1}-w_j^n \quad \text{et} \quad \sigma=\Delta t/\Delta x,$$

w_j^n désignant la solution numérique en $x=j\Delta x$ et $t=n\Delta t$.

La partie explicite du schéma (2.4) est supposée être de la forme :

(2.6) $$h_{j+(1/2)}^{\text{expl}}=(\mu f)_{j+(1/2)}-\frac{1}{2\sigma}\mathrm{Q}_{j+(1/2)}(\delta w)_{j+(1/2)}$$

où $f_j=f(w_j)$, $\mathrm{Q}_{j+(1/2)}$ *est une matrice* $m\times m$:

$$\mathrm{Q}_{j+(1/2)}=\mathrm{Q}(w_{j-J+1},\ \ldots,\ w_{j+J};\ \sigma),$$

μ et δ sont les opérateurs de moyenne et de différence spatiales définis par :

$$(\mu\psi)_{j+(1/2)}=\frac{1}{2}(\psi_j+\psi_{j+1}),\qquad (\delta\psi)_{j+(1/2)}=\psi_{j+1}-\psi_j.$$

Précisons que presque tous les schémas utilisés en pratique satisfont l'hypothèse (2.6).

Le schéma (2.4) est dit entropique [1] si ses solutions satisfont une inégalité d'entropie discrète de la forme :

(2.7) $$\Delta\mathrm{E}_j+\sigma(\Phi_{j+(1/2)}-\Phi_{j-(1/2)})\leqq 0$$

où $\Delta\mathrm{E}_j=\mathrm{E}(w_j^{n+1})-\mathrm{E}(w_j^n)$ et $\Phi_{j+(1/2)}$ est un flux d'entropie numérique consistant avec le flux d'entropie exact.

L'intérêt d'un schéma conservatif et entropique est que si ce schéma converge presque partout, en restant uniformément borné, lorsque Δx et Δt tendent vers zéro avec $\sigma=\mathrm{Cte}$, alors il converge vers une solution faible de (2.1) vérifiant l'inégalité d'entropie (2.3).

3. Critère d'entropie de Tadmor pour les schémas semi-discrets. — Introduisons les « variables entropiques », qui sont définies comme les éléments de la matrice-colonne $v(w)=d\mathrm{E}(w)/dw$.

Après le changement de fonction $w\to v$, qui est licite en vertu de la stricte convexité de l'entropie E, et en posant $\check{f}(v)=f[w(v)]$ le système (2.1) devient :

(3.1) $$\frac{\partial w(v)}{\partial t}+\frac{\partial\check{f}(v)}{\partial x}=0.$$

On sait que le système (3.1) est hyperbolique-symétrique. Sous forme développée, il s'écrit :

$$\mathrm{S}^{-1}(v)\frac{\partial v}{\partial t}+\check{\mathrm{A}}(v)\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

avec des matrices jacobiennes symétriques définies par :

$$\mathrm{S}=\frac{dv}{dw}=\frac{d^2\mathrm{E}}{dw^2}>0\qquad\text{et}\qquad\check{\mathrm{A}}=\frac{d\check{f}}{dv}=\mathrm{AS}^{-1}.$$

En notant $\check{\mathrm{F}}(v)=\mathrm{F}[w(v)]$, la condition de compatibilité (2.2) devient :

(3.2) $$\left(\frac{d\check{\mathrm{F}}}{dv}\right)^{\mathrm{T}}=v^{\mathrm{T}}\check{\mathrm{A}}.$$

La correction d'entropie que nous proposons est inspirée d'un critère trouvé par Tadmor [6] pour des schémas conservatifs semi-discrets :

(3.3) $$\frac{d}{dt}w_j+\frac{1}{\Delta x}(\bar{h}_{j+(1/2)}-\bar{h}_{j-(1/2)})=0$$

où $\bar{h}_{j+(1/2)}$ s'identifie à $h_{j+(1/2)}^{\text{expl}}$ en désignant ici par $w_j=w_j(t)$ la solution approchée en $x=j\Delta x$ et au temps t. Dans la définition de σ, Δt devient un pas de temps fictif introduit seulement pour préserver l'homogénéité des formules (Q reste sans dimension).

Le critère de Tadmor peut s'énoncer sous diverses formes. La forme la mieux adaptée à notre étude est la suivante : *Une condition suffisante (et nécessaire pour les schémas à trois points) pour qu'une solution* w_j *de* (3.3) *satisfasse une inégalité d'entropie semi-discrète de la forme :*

$$\frac{d}{dt}E_j+\frac{1}{\Delta x}(\Phi_{j+(1/2)}-\Phi_{j-(1/2)})\leqq 0 \tag{3.4}$$

est

$$(\delta v^T Q\,\delta w)_{j+(1/2)}\geqq(\delta v^T Q^*\,\delta w)_{j+(1/2)} \tag{3.5}$$

où $v_j=v(w_j)$ *et* $Q^*_{j+(1/2)}$ *est une matrice définie par :*

$$Q^*_{j+(1/2)}=\check{Q}^*_{j+(1/2)}\,S_{j+(1/2)} \tag{3.6}$$

$$\check{Q}^*_{j+(1/2)}=\sigma\int_0^1(2\xi-1)\,\check{A}\,[(1-\xi)\,v_j+\xi\,v_{j+1}]\,d\xi \tag{3.7}$$

$$S_{j+(1/2)}=\int_0^1 S\,[(1-\xi)\,v_j+\xi\,v_{j+1}]\,d\xi. \tag{3.8}$$

Remarque. — La matrice $\sigma^{-1}Q$ est appelée « matrice de viscosité numérique » par Tadmor. Pour un schéma semi-discret, cette matrice caractérise effectivement la viscosité interne de l'approximation. Pour le schéma complet (2.4), il n'en est pas de même car il faut tenir compte de la discrétisation temporelle.

4. Construction de la correction d'entropie. — On considère maintenant la résolution numérique d'un problème stationnaire par une méthode instationnaire, c'est-à-dire que le schéma (2.4) est utilisé ici comme une méthode itérative pour déterminer une solution stationnaire du système (2.1). Cette situation est particulièrement fréquente en Aérodynamique.

A l'état stationnaire le schéma (2.4) et l'inégalité d'entropie discrète (2.7) se réduisent à :

$$h^{\text{expl}}_{j+(1/2)}-h^{\text{expl}}_{j-(1/2)}=0 \tag{4.1}$$

$$\Phi_{j+(1/2)}-\Phi_{j-(1/2)}\leqq 0. \tag{4.2}$$

Définition. — *Le schéma* (2.4)-(2.5) *sera dit « entropique à l'état stationnaire » si les solutions* w_j *de* (4.1) *satisfont une inégalité de la forme* (4.2).

En utilisant le travail de Tadmor, on obtient immédiatement le résultat suivant :

Théorème 1. — *Le schéma* (2.4)-(2.6) *est entropique à l'état stationnaire si (et seulement si pour un schéma à trois points) le critère de Tadmor* (3.5) *est satisfait.*

Partant d'un schéma (2.4)-(2.6) non nécessairement entropique, on se propose de construire un schéma corrigé, entropique à l'état stationnaire, associé à la matrice :

$$Q'_{j+(1/2)}=Q_{j+(1/2)}+Q^c_{j+(1/2)} \tag{4.3}$$

où la matrice de correction $Q^c_{j+(1/2)}$ est telle que :

$$Q^c_{j+(1/2)}=0,\qquad j\in\tau \tag{4.4}$$

$$q^c_{j+(1/2)}\geqq q^*_{j+(1/2)}-q_{j+(1/2)},\qquad j\notin\tau \tag{4.5}$$

où $q=\delta v^T Q\,\delta w$, $q^*=\delta v^T Q^*\,\delta w$ et $q^c=\delta v^T Q^c\,\delta w$, τ désignant l'ensemble des points j où $q^*_{j+(1/2)}-q_{j+(1/2)}\leqq 0$.

Les conditions (4.4) et (4.5) expriment que la correction n'agit pas où elle n'est pas nécessaire et, là où elle agit, elle assure la satisfaction du critère de Tadmor (3.5).

Dans le cas général, on ne sait pas calculer la matrice Q^*, de sorte qu'on ne peut la faire intervenir explicitement dans la correction. Par contre on peut calculer q^*.

LEMME :

$$q^*_{j+(1/2)} = 2\,\sigma\,[\delta F - 2(\mu\, v^T)\,\delta f\,]_{j+(1/2)}.$$

Ce lemme résulte de (3.6)-(3.8) après une intégration par parties et l'utilisation de la relation suivante déduite de la condition de compatibilité (3.2) :

$$\breve{f} = \frac{d}{dv}(v^T \breve{f} - \breve{F}).$$

Une matrice de correction adéquate peut être trouvée sous la forme simple :

$$Q^c_{j+(1/2)} = \alpha_{j+(1/2)}\,I \tag{4.6}$$

où I est la matrice unité $m \times m$ et $\alpha_{j+(1/2)} \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 2. — *Soit* $p = \delta v^T \delta w$. *La correction* (4.3), *avec la matrice* (4.6) *et*

$$\alpha_{j+(1/2)} = \begin{cases} 0, & si \quad p_{j+(1/2)} = 0; \\ \dfrac{\max(q^*_{j+(1/2)} - q_{j+(1/2)}, 0)}{p_{j+(1/2)}}, & sinon. \end{cases} \tag{4.7}$$

(*a*) *Vérifie* (4.4) *et* (4.5).

(*b*) *N'augmente pas le nombre de points du schéma.*

(*c*) *Est de nature dissipative, c'est-à-dire* $\alpha_{j+(1/2)} \geqq 0$.

(*d*) *Est la moins dissipative des corrections de la forme* (4.3), (4.6) *assurant la satisfaction du critère de Tadmor.*

Démonstration. — D'après la définition de S et (3.8), on a $p_{j+(1/2)} = (\delta w^T\, S\, \delta w)_{j+(1/2)}$.

(*a*) Si $j \in \tau$, il est clair que $\alpha_{j+(1/2)} = 0$, de sorte que (4.4) est vrai. Si $j \notin \tau$, on a nécessairement $(\delta w)_{j+(1/2)} \neq 0$. Comme $S_{j+(1/2)}$ est définie positive, on en déduit que $p_{j+(1/2)} \neq 0$ et donc $q^c_{j+(1/2)} = \alpha_{j+(1/2)}\, p_{j+(1/2)} = q^*_{j+(1/2)} - q_{j+(1/2)}$, ce qui vérifie (4.5).

(*b*) La propriété résulte du fait que $p_{j+(1/2)}$ et $q^*_{j+(1/2)}$ ne dépendent que des états w_j et w_{j+1}.

(*c*) La matrice $S_{j+(1/2)}$ étant positive, on a $p_{j+(1/2)} \geqq 0$ et par suite $\alpha_{j+(1/2)} \geqq 0$.

(*d*) En effet, soit $\alpha_{j+(1/2)} < \tilde{\alpha}_{j+(1/2)}$ *pour* $j \notin \tau$. On a $\tilde{\alpha}_{j+(1/2)}\, p_{j+(1/2)} < q^*_{j+(1/2)} - q_{j+(1/2)}$, ce qui montre que le schéma associé à la matrice $Q_{j+(1/2)} + \tilde{\alpha}_{j+(1/2)}\, I$ ne satisfait pas le critère de Tadmor.

COROLLAIRE. — *Pour les schémas à trois points, la correction* (4.3), (4.6), (4.7) *est la moins dissipative des corrections de la forme* (4.3), (4.6) *qui rendent le schéma entropique à l'état stationnaire.*

5. PROPRIÉTÉS ET APPLICATION DE LA CORRECTION D'ENTROPIE. — On a démontré que la correction d'entropie (4.3), (4.6) et (4.7) possède les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1. — *Si le schéma de base est précis au second ordre en espace et en temps, il en est de même du schéma corrigé.*

PROPOSITION 2. — *Si le schéma de base est linéairement stable dans* L_2 *et fournit une solution stationnaire entropique exacte, alors la correction est inopérante à l'état stationnaire (elle préserve donc la solution exacte).*

PROPOSITION 3. — *Le domaine de stabilité linéaire du schéma corrigé est celui du schéma de base.*

La correction d'entropie décrite dans cette Note a été appliquée à des problèmes stationnaires de Mécanique des fluides compressibles, en prenant comme schéma de base le schéma implicite centré proposé dans [7], qui n'est pas entropique. En partant d'un écoulement unidimensionnel stationnaire constitué d'un choc, d'une discontinuité de détente (non physique) et d'un autre choc, le schéma corrigé conduit à une solution stationnaire entropique qui se trouve être la solution exacte (une seule discontinuité de type choc sans structure numérique).

La correction d'entropie a été étendue au cas multidimensionnel pour traiter des problèmes d'Aérodynamique hypersonique. Rappelons que le schéma implicite de base avait été appliqué avec succès à des problèmes transsoniques stationnaires sans recours à une viscosité artificielle ou un décentrement [8]. Toutefois, sa robustesse s'est révélée insuffisante pour calculer sans correction des écoulements dont le nombre de Mach est supérieur à 3 ou 4. Cette difficulté a été surmontée à l'aide de la présente correction d'entropie. Des écoulements à grand nombre de Mach autour d'un corps émoussé ont pu ainsi être calculés avec des chocs intenses dont l'étalement numérique n'excède pas une à deux mailles.

Note remise le 19 décembre 1988, acceptée le 31 janvier 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. HARTEN, J. M. HYMAN et P. D. LAX, On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks, *Comm. Pure Appl. Math.*, 29, 1976, p. 297-322.

[2] A. Y. LE ROUX, A numerical conception of entropy for quasi-linear equations, *Math. Comp.*, 31, 1977, p. 848-872.

[3] S. OSHER, Riemann solvers, the entropy condition and difference approximations, *S.I.A.M. J. Numer. Anal.*, 21, 1984, p. 217-235.

[4] P. A. MAZET et F. BOURDEL, Sur une formulation variationnelle entropique des systèmes hyperboliques conservatifs : cas pluridimensionnel, *Rech. Aérosp.*, 5, 1984, p. 369-378.

[5] T. J. R. HUGUES, L. P. FRANCA et M. MALLET, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 54, 1986, p. 223-234.

[6] E. TADMOR, The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. I, *Math Comp.*, 49, 1987, p. 91-103.

[7] A. LERAT, Une classe de schémas aux différences implicites pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 288, série A, 1979, p. 1033-1036.

[8] A. LERAT et J. SIDES, Efficient solution of the steady Euler equations with a centered implicit method, in *Numerical Methods for Fluid Dynamics III*, MORTON et BAINES éd., Clarendon Press, Oxford, 1988, p. 65-86.

Laboratoire de Simulation numérique en Mécanique des Fluides,
E.N.S.A.M., 151, *boulevard de l'Hôpital*, 75013 *Paris.*